ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO

CORSO DI ORDINAMENTO • 2004

Sessione straordinaria

PROBLEMA 2

In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (*Oxy*), sono assegnate le curve di equazione:

$$y = \frac{1 + a \operatorname{sen} x}{\cos x},$$

dove a è un parametro reale.

a) Dimostrare che si tratta di curve periodiche con periodo 2π, che hanno in comune infiniti punti dei quali si chiedono le coordinate.

b) Tra le curve assegnate determinare quelle che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) Controllato che due curve soddisfano alla condizione precedente, dimostrare che sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse y e disegnarle nell'intervallo $-\pi \leq x \leq \pi$, dopo aver spiegato, in particolare, perché nessuna di esse presenta punti di flesso.

PROBLEMA 2

a) Posto $f_a(x)=\dfrac{1+a\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$, essa può essere scritta come $f_a(x)=\dfrac{1}{\cos x}+a\,\mathrm{tg}\,x$. La periodicità della funzione coseno è 2π, cosicché $\dfrac{1}{\cos x}$ è periodica di periodo $T_1=2\pi$; $\mathrm{tg}\,x$ ha periodicità π per cui il periodo di $a\,\mathrm{tg}\,x$ è $T_2=\pi$. La funzione f_a è somma di funzioni periodiche: essa è allora periodica di periodo $T=$ m.c.m. $(T_1,\ T_2)$ cioè $T=2\pi$.

Presi due valori arbitrari di a, a_1 e a_2 con $a_1\neq a_2$, e le corrispondenti funzioni f_{a_1} e f_{a_2}, i loro punti comuni soddisfano l'equazione $f_{a_1}(x)=f_{a_2}(x)$, cioè:

$$\frac{1}{\cos x}+a_1\,\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{\cos x}+a_2\,\mathrm{tg}\,x \quad\rightarrow\quad (a_1-a_2)\,\mathrm{tg}\,x=0 \quad\rightarrow\quad \mathrm{tg}\,x=0 \quad\rightarrow\quad x=k\pi,\ \text{con } k\in\mathbb{Z}.$$

Le coordinate di tali punti sono: $(2k\pi;\,1)$ e $((2k+1)\,\pi;\,-1)$.

Vista l'arbitrarietà di a_1 e a_2 si può concludere che le curve $f_a(x)=\dfrac{1+a\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$ hanno in comune infiniti punti di coordinate $(2k\pi;\,1)$ e $((2k+1)\,\pi;\,-1)$.

b) La funzione $y=\dfrac{1+a\,\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$ ha campo di esistenza C.E.: $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$ e derivata prima:

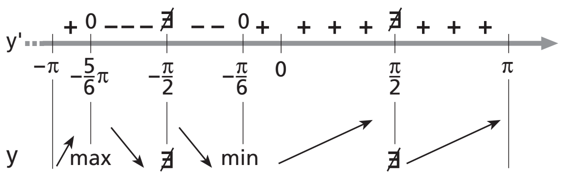
$y'=\dfrac{a\cos^2 x+\mathrm{sen}\,x(1+a\,\mathrm{sen}\,x)}{\cos^2 x}=\dfrac{\mathrm{sen}\,x+a}{\cos^2 x}$. La curva ha tangente orizzontale nei punti in cui la derivata prima si annulla, ossia per $\mathrm{sen}\,x=-a$. Condizione necessaria per l'esistenza di tali punti è quindi: $|a|<1$. La loro ordinata si trova sostituendo $\mathrm{sen}\,x=-a$ nell'equazione della funzione e perciò vale: $y=\dfrac{1-a^2}{\pm\sqrt{1-a^2}}$. Imponendo per ipotesi $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e tenendo conto che $|a|<1$, risulta:

$$\frac{1-a^2}{\sqrt{1-a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\rightarrow\quad \sqrt{1-a^2}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad\rightarrow\quad 1-a^2=\frac{3}{4} \quad\rightarrow\quad a=\pm\frac{1}{2}.$$

Tali valori sono entrambi accettabili; pertanto le curve che hanno come tangente orizzontale la retta di equazione $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sono: $y=\dfrac{1+\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$, cioè $y=\dfrac{2+\mathrm{sen}\,x}{2\cos x}$, e $y=\dfrac{1-\frac{1}{2}\mathrm{sen}\,x}{\cos x}$, ovvero $y=\dfrac{2-\mathrm{sen}\,x}{2\cos x}$.

c) Considerata la funzione $y=\dfrac{2+\operatorname{sen} x}{2\cos x}$, si applica la simmetria rispetto all'asse y: $\begin{cases} X=-x \\ Y=y \end{cases}$. La funzione trasformata è $Y=\dfrac{2+\operatorname{sen}(-X)}{2\cos(-X)}$ ovvero $Y=\dfrac{2-\operatorname{sen} X}{2\cos X}$. Essa coincide con la funzione $y=\dfrac{2-\operatorname{sen} x}{2\cos x}$ nello stesso sistema di assi cartesiani. Pertanto si conclude che le funzioni $y=\dfrac{2+\operatorname{sen} x}{2\cos x}$ e $y=\dfrac{2-\operatorname{sen} x}{2\cos x}$ sono l'una simmetrica dell'altra rispetto all'asse delle ordinate.

Per rappresentare i loro grafici nell'intervallo $-\pi\leq x\leq \pi$, è sufficiente compiere lo studio di una sola di esse, per esempio $y=\dfrac{2+\operatorname{sen} x}{2\cos x}$. Il suo campo di esistenza è C.E.: $x\neq \pm\dfrac{\pi}{2}$. Essa non è né pari né dispari. Non ha intersezioni con l'asse x poiché il numeratore della funzione, $2+\operatorname{sen} x$, non si può mai annullare ed è sempre positivo; l'intersezione con l'asse y è $(0;\ 1)$. La funzione è positiva per $\cos x>0$ cioè per $-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$; è negativa per $-\pi\leq x<-\dfrac{\pi}{2}\vee\dfrac{\pi}{2}<x\leq\pi$. I limiti agli estremi del campo di esistenza sono: $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi^{\pm}}{2}}\dfrac{2+\operatorname{sen} x}{2\cos x}=\pm\infty$ $\lim\limits_{x\to\frac{\pi^{\pm}}{2}}\dfrac{2+\operatorname{sen} x}{2\cos x}=\mp\infty$; pertanto la curva ha asintoti verticali $x=-\dfrac{\pi}{2}$ e $x=\dfrac{\pi}{2}$. Nei punti $x=-\pi$ e $x=\pi$ il grafico ha coordinate $A(-\pi;\ -1)$ e $B(\pi;\ -1)$. La funzione derivata è $y'=\dfrac{2\operatorname{sen} x+1}{2\cos^2 x}$. Essa si annulla nei punti $x=-\dfrac{5}{6}\pi$ e $x=-\dfrac{\pi}{6}$. Nella figura 3 è riportata la tabella del suo segno.



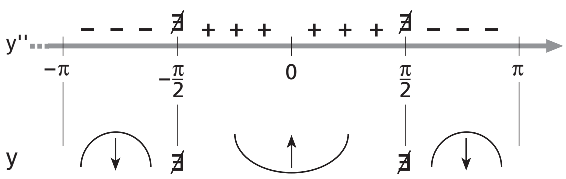
◀ **Figura 3.**

La funzione y ha un massimo nel punto $x=-\dfrac{5}{6}\pi$ e un minimo per $x=-\dfrac{\pi}{6}$. Le corrispondenti coordinate sul grafico valgono $M\left(-\dfrac{5}{6}\pi;-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $N\left(-\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

La derivata seconda della funzione è

$$y''=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\operatorname{sen} x+1}{\cos^3 x}.$$

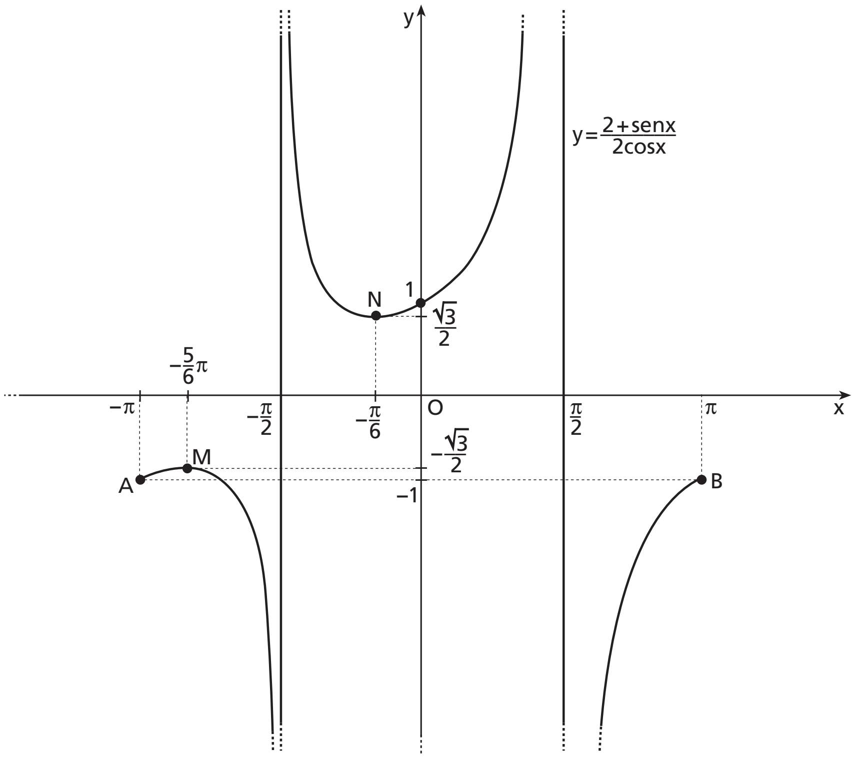
La tabella del suo segno è indicata nella figura 4.



▶ **Figura 4.**

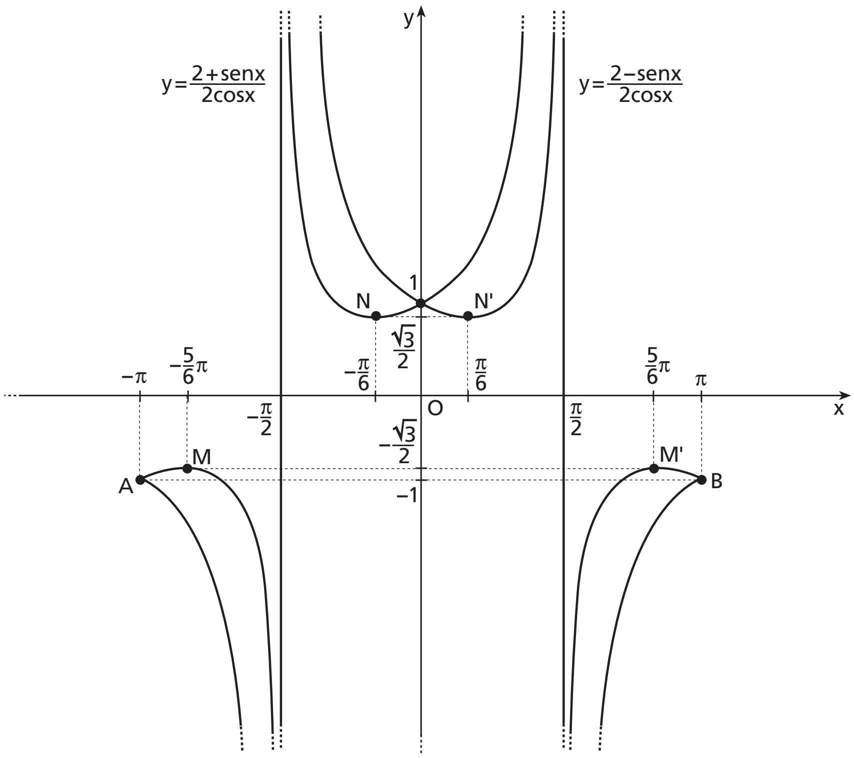
Si osserva che la derivata seconda non si annulla mai: non è quindi soddisfatta la condizione necessaria per l'esistenza di punti di flesso.

Il grafico della funzione $y=\dfrac{2+\operatorname{sen} x}{2\cos x}$ è rappresentato nella figura 5.



◀ **Figura 5.**

Sfruttando la proprietà di simmetria tra le funzioni $y = \dfrac{2 + \operatorname{sen} x}{2\cos x}$ e $y = \dfrac{2 - \operatorname{sen} x}{2\cos x}$ rispetto all'asse y, è quindi ora possibile tracciare il grafico della seconda funzione (figura 6).



◀ **Figura 6.**

