4 Dimostrare che ogni funzione del tipo $y = a\,\mathrm{sen}^2 x + b\,\mathrm{sen}\, x \cos x + c\cos^2 x$, dove a, b, c sono numeri reali non contemporaneamente nulli, ha di regola per grafico una sinusoide. C'è qualche eccezione?

4 Una funzione sinusoidale ha espressione $y = A\text{sen}(\omega x + \varphi)$, con A e $\omega \neq 0$, dove $|A|$ è detta ampiezza, ω pulsazione e φ fase iniziale. Utilizzando le formule goniometriche del seno della somma di due angoli, essa può essere scritta come:

$$y = A\text{sen}(\omega x + \varphi) \quad \rightarrow \quad y = A\cos\varphi \cdot \text{sen}\,\omega x + A\text{sen}\,\varphi \cdot \cos\omega x.$$

Si consideri ora la funzione $y = a\text{sen}^2 x + b\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x$. Si compiano le seguenti sostituzioni, che derivano dalle formule di duplicazione:

$$\text{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \text{sen}\,x\cos x = \frac{\text{sen}\,2x}{2}.$$

La funzione diventa:

$$y = a\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{b}{2}\text{sen}\,2x + c\frac{1+\cos 2x}{2} \quad \rightarrow \quad y = \frac{b}{2}\text{sen}\,2x + \left(\frac{c}{2} - \frac{a}{2}\right)\cdot \cos 2x + \frac{a}{2} + \frac{c}{2}.$$

Se $a = c \neq 0$ e $b = 0$ la funzione è:

$$y = \frac{a+c}{2} = a,$$

quindi il suo grafico è una retta parallela all'asse x e non una sinusoide.
Se $a \neq c$, confrontiamo l'espressione della funzione ottenuta con l'espressione della funzione sinusoidale. Otteniamo:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{2} + \dfrac{c}{2} = 0 \\ \dfrac{b}{2} = A\cos\varphi \\ \dfrac{c}{2} - \dfrac{a}{2} = A\text{sen}\,\varphi \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a = -c \\ A\cos\varphi = \dfrac{b}{2} \\ A\text{sen}\,\varphi = c \end{cases}.$$

Eleviamo al quadrato ambo i membri della seconda e della terza equazione:

$$A^2\cos^2\varphi = \frac{b^2}{4}$$
$$A^2\text{sen}^2\varphi = c^2.$$

Sommiamo membro a membro e raccogliamo A^2:

$$A^2(\text{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) = c^2 + \frac{b^2}{4} \quad \rightarrow \quad A = \pm\sqrt{c^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

Consideriamo ancora la seconda e terza equazione e dividiamo membro a membro:

$$\frac{\cancel{A}\,\text{sen}\,\varphi}{\cancel{A}\cos\varphi} = \frac{2c}{b} \quad \text{con } b \neq 0.$$

Pertanto la funzione di partenza, $y = a\,\text{sen}^2 x + b\,\text{sen}\,x\cos x + c\cos^2 x$, è sinusoidale se $a = -c$, con a, $c \neq 0$, $b \neq 0$ e ha forma $y = A\,\text{sen}(\omega x + \varphi)$, con ampiezza $|A| = \sqrt{c^2 + \frac{b^2}{4}}$, pulsazione $\omega = 2$ e fase iniziale $\varphi = \text{arctg}\,\frac{2c}{b}$.

Se $a = -c \neq 0$, $b = 0$, la funzione si riduce alla forma: $y = c\cos 2x \;\; \rightarrow \;\; y = c\,\text{sen}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, con $|A| = |c|$, $\omega = 2$ e $\varphi = \frac{\pi}{2}$ quindi essa è ancora sinusoidale.

Si può allora concludere che per a e c diversi da zero e $a \neq -c$, la funzione non è sinusoidale. Ugualmente,

- per $b = c = 0$ l'equazione si riduce a $y = \text{sen}^2 x$ non sinusoidale;
- per $a = b = 0$ l'equazione si riduce a $y = \cos^2 x$ non sinusoidale.

